

MODULO DE INGRESO

2025



MATEMATICA

EMPRESARIAL I

UNIDAD N°0: I PARTE

LOS NÚMEROS REALES Y SUS OPERACIONES

Objetivos:

Al finalizar esta primera unidad deberás ser capaz de:

- ✓ Familiarizarse con el campo numérico real y la recta de los números reales.
- ✓ Operar con números reales y aplicar sus propiedades.
- ✓ Operar con expresiones algebraicas enteras.
- ✓ Utilizar productos especiales.
- ✓ Establecer las reglas básicas de factorización y aplicarlas para factorizar expresiones.
- ✓ Simplificar, sumar, restar, multiplicar y dividir expresiones algebraicas racionales.

Contenidos:

UNIDAD N°1:

LOS NÚMEROS REALES Y SUS OPERACIONES

- 1.1 Los Números Reales
 - 1.1.1 ¿Con qué conjunto de números trabajaremos?
 - 1.1.2 Representación de números reales en la recta
 - 1.1.3 Propiedades de las operaciones con números reales
 - 1.1.3.1 Propiedad asociativa de la suma y el producto
 - 1.1.3.2 Propiedad distributiva del producto respecto a la suma y a la resta
 - 1.1.4 Exponentes y radicales
- 1.2 Expresiones Algebraicas
 - 1.2.1 Expresiones algebraicas racionales
 - 1.2.1.1 Expresiones algebraicas enteras
 - 1.2.1.1.1 Productos notables
 - 1.2.1.1.2 Reglas de factorización
 - 1.2.1.2 Expresiones algebraicas fraccionarias
 - 1.3 Razones y proporciones

1.1 Los Números Reales

En este capítulo abordaremos el concepto de **números reales** y de las **relaciones funcionales** que surgen entre variables. Su estudio se formalizará a partir de las distintas representaciones: algebraicas, gráficas, expresiones coloquiales y tabla de valores.

A partir de situaciones sencillas que se presentan en la vida diaria, se comenzará reconociendo que existen variables que muestran alguna relación de dependencia. El estudio se centrará principalmente en el concepto de **función**, que constituye el pilar fundamental del análisis matemático. Conocer los distintos tipos de funciones permite la **modelización matemática** de situaciones relacionadas con las Ciencias Económicas.

De las funciones, se analizará el dominio e imagen, el comportamiento gráfico, identificando puntos notables, intervalos de crecimiento o decrecimiento, intervalos en los cuales asumen valores positivos, negativos o nulos y valores extremos.

Para abordar satisfactoriamente estos conceptos se deberán tener presentes los conocimientos aprendidos en el nivel medio, en cuanto a propiedades y operaciones de los números reales, ecuaciones, factorización de expresiones racionales y propiedades de exponentes y radicales.

1.1.1 ¿Con qué conjunto de números trabajaremos?

“Un número es la expresión de una cantidad con relación a su unidad”.

Los conocimientos matemáticos surgen ligados a cuestiones prácticas. El desarrollo de la teoría de los números es paralelo al de la medida, la ampliación del campo numérico viene de la mano de las necesidades de medición.

Establecer la medida de una magnitud permite el desarrollo de los números racionales, ya que la unidad elegida, muchas veces, no puede ser contenida una cantidad entera de veces.

Los problemas de las mediciones de magnitudes no se terminan, aunque consideremos la totalidad de los números racionales, ya que no siempre es posible establecer el resultado de una medición con ellos. Pensemos, por ejemplo, en el caso de la diagonal de un cuadrado de lado igual a uno. Es por ello que resulta necesario un conjunto más grande que contenga a todos los números.

Los conjuntos numéricos fueron elaborados lentamente a través de los tiempos; para llegar a los conceptos que hoy nos parecen sencillos y lógicos, pasaron muchos siglos y diferentes culturas realizaron sus aportes.



Los **conjuntos numéricos** son agrupaciones de números que guardan una serie de **propiedades que los caracterizan**.

El concepto de número surgió en la antigüedad, ampliándose y generalizándose con el tiempo. En el mundo occidental antiguo, Babilonia, Grecia, Egipto y Roma, desarrollaron elevados conocimientos matemáticos, que fueron aplicados a importantes obras agrícolas y arquitectónicas. Por su parte en el mundo oriental, se observa ya en el siglo *III* a. C., en la cultura china, que los números negativos son representados mediante barras de color negro y los números positivos por barras de color rojo.

Hacia el año 500, en la India, se plasmaron los orígenes de nuestro sistema de numeración. El principio de posición, valor relativo de las cifras, las nueve cifras y el cero aparecen en las obras del matemático Brahmagupta. En el año 772, una embajada india llevó a Bagdad los libros que recogían estos conocimientos y en la primera mitad del siglo *IX* se recopilaron los nuevos métodos matemáticos en el tratado de Al-Khwarizmi, siendo difundido por la civilización musulmana en Sicilia y España.

En 1202 el mercader Leonardo Pisano, reunió los conocimientos de aritmética y álgebra en su obra llamada Liber Abaci, difundiendo por Europa la numeración india. En el siglo *XIII*, el matemático italiano Fibonacci, introdujo los números negativos, a raíz de un problema referente al dinero que no tenía una solución positiva, observando así su necesidad.

En el siglo *XV* se aceptó que algunas ecuaciones tuvieran solución con números negativos. En el siglo *XVI*, se popularizó el uso de la barra horizontal para separar los términos de una fracción. El problema de los números irracionales no se resolvió por completo hasta el siglo *XVII*, cuando Fermat, matemático francés, considerado el padre de la moderna teoría de los números, demostró que expresiones como raíz cuadrada de tres no eran números racionales. En 1777, Euler solucionó el problema de las raíces negativas. En 1799, Gauss, demostró que las soluciones de cualquier ecuación algebraica, fuera cual fuese su grado, pertenecía a un conjunto de números que él llamó complejos, a los que consideró compuestos de un número ordinario, hoy llamado número real, más un múltiplo de la unidad imaginaria i , donde $i^2 = -1$.

Entre el siglo *XVI* al *XIX*, se produjo el desarrollo conceptual de los números reales. En cuanto a las unidades de medición, en el pasado había una multitud de unidades de medida distintas, cada región usaba su propio sistema. Tras la Revolución Francesa se crea un nuevo sistema de medidas: el **Sistema Métrico Decimal**, que fue adoptado por un sin número de estados por ser un sistema regular, debido a reglas que organizan sus unidades de medida y la coherencia interna entre las distintas magnitudes. El metro se presentó formalmente en junio de 1799 bajo el lema "**Para todos los pueblos, para todos los tiempos**".



UN POCO DE HISTORIA



El **tratado de Al-Khwarizmi**, describe con detalle el sistema hindú de numeración posicional de base diez y la manera de hacer cálculos con él. Su tratado de álgebra es una introducción compacta al cálculo, usando reglas para completar y reducir ecuaciones. Además de sistematizar la resolución de ecuaciones cuadráticas, también trata geometría, cálculos comerciales y de herencias.



En la historia del mundo contemporáneo, la **Revolución Francesa** significó el tránsito de la sociedad estamental, heredada del feudalismo, a la sociedad capitalista, basada en una economía de mercado. Los revolucionarios franceses crearon un nuevo modelo de sociedad y estado, difundiendo un modo de pensar que fue adoptado por la mayor parte del mundo occidental.

A partir del 20 de mayo de 2019, el sistema de medición sufrirá un cambio, la unidad de medida “kilogramo” será redefinida en el Sistema Internacional de Medidas, que rige desde 1889. En la Conferencia General de Pesos y Medidas, del 16 de noviembre de 2018 realizada en París, expertos de 42 países acordaron una nueva definición del kilo. Su definición tendrá como base una fórmula matemática y ya no dependerá de la magnitud de un objeto físico. Lo que permite un sistema más preciso y asequible en cualquier lugar del mundo.

Definición de Números Reales

El conjunto de los **números reales** (\mathbb{R}) está formado por la unión de los **números racionales** y los **números irracionales**.

Los **números racionales** (\mathbb{Q}) son aquellos que pueden **expresarse como fracción de números enteros**. Por lo tanto, pertenecen a este conjunto los números naturales (\mathbb{N}), los números enteros (\mathbb{Z}) y los números racionales no enteros, también llamados fraccionarios (F) que se componen por las expresiones decimales y las periódicas.

Los **números irracionales** (I) son aquellos que **no pueden escribirse como fracción de números enteros** y no tienen período (su expresión decimal tiene infinitas cifras decimales no periódicas).

En el siguiente esquema se presentan a los diferentes conjuntos numéricos con los que trabajaremos a lo largo de la asignatura:

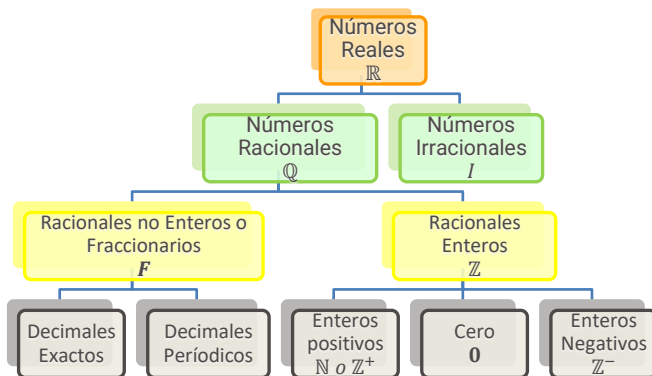


Fig. 1.: Los Números Reales



CARACTERÍSTICAS DE LOS NÚMEROS REALES



- 1) Forman un conjunto infinito, que no tiene ni primer ni último elemento.
- 2) Entre dos números reales hay infinitos números reales.
- 3) A cada número real, le corresponde un único punto en la recta numérica. Recíprocamente, a cada punto de la recta le corresponde un solo número real. El conjunto \mathbb{R} “completa” o “llena” la recta numérica.

Con el conjunto de los números naturales podemos sumar y multiplicar, obteniendo como resultado otro número natural, pero no siempre es posible restar y dividir dos números naturales y obtener como resultado otro número natural. Además, no todas las raíces de números naturales dan como resultado otro número natural, por ejemplo $\sqrt{3}$ no da como resultado otro número natural.

Este conjunto representa el conjunto de los **números naturales**:

$$\mathbb{N}: \{1, 2, 3, \dots\} \text{ ó } \{x/x \in \mathbb{N}\}$$

Lo simbolizamos entre llaves, nombrando los primeros elementos y escribiendo tres puntos suspensivos, dado que el listado continúa sin fin. Con este conjunto podemos sumar y multiplicar, obteniendo como resultado otro número natural, pero no siempre es posible restar y dividir dos números naturales y obtener como resultado otro número natural.

Surge entonces:

El conjunto de los enteros negativos ($\mathbb{Z}^-: \{\dots, -4, -3, -2, -1\}$), junto al cero $\{0\}$ y a los naturales (también llamados enteros positivos, $\mathbb{Z}^+ = \mathbb{N}$), forman el conjunto de los **números enteros**:

$$\mathbb{Z} = \mathbb{Z}^+ \cup \{0\} \cup \mathbb{Z}^-$$

En este conjunto es posible resolver, además de la suma y multiplicación, la resta y obtener como resultado otro número entero.



Dentro del conjunto de los números enteros, no todas las divisiones de dos números enteros dan como resultado otro número entero y esto ocurre cuando el **dividendo** no es múltiplo del **divisor**.

Los **números fraccionarios**, F , dan solución a esta situación y junto a los enteros forman el conjunto de los números racionales, simbolizado con una \mathbb{Q} . Este último conjunto, comprende a todo número que pueda expresarse como un cociente $\frac{p}{q}$, donde tanto "p" como "q" son enteros y $q \neq 0$.

Hay dos maneras de escribir un mismo número racional, como fracción o en forma decimal resolviendo el cociente.



Los elementos de un conjunto numérico se listan de menor a mayor.



Para trabajar con los conjuntos numéricos se deben recordar las operaciones y sus propiedades, las expresiones algebraicas, las ecuaciones e inecuaciones.



Existen números que no son racionales como, por ejemplo, la diagonal de un cuadrado lado 1 mide una longitud igual a la raíz cuadrada de 2, es decir $\sqrt{2}$. Esta expresión no puede escribirse como un cociente de números enteros. Es por ello que, $\sqrt{2}$ lleva el nombre de número irracional.

Otros números irracionales son: $\sqrt{3}$, $\sqrt{7}$, $-\sqrt{10}$, π . Este último es la razón entre la distancia alrededor de un círculo (*su circunferencia*) y la distancia a través de él (*su diámetro*).

Así se completa el conjunto de los números reales, \mathbb{R} , con el subconjunto de los números irracionales, I :

Los números irracionales, I , no pueden ser escritos como una división entre enteros y se expresan **con infinitas cifras decimales NO periódicas**. Algunos provienen de raíces no exactas.

1.1.2 Representación de los Números Reales en la Recta

Seguramente ya conoces cómo representar a los números en una recta numérica, pero ¿cómo la introducimos en nuestra vida cotidiana? En los textos que leemos es frecuente encontrar referencias a lustros, décadas, etc. Trabajar con magnitudes es objeto sistemático no solo de la matemática, sino también de la historia.

Para comprender la relación biunívoca que existe entre los puntos de la recta y los números reales, es posible pensar que, al representar diferentes acontecimientos transcurridos en el tiempo, se tiene la percepción intuitiva de que éste es una magnitud continua, que transcurre sin saltos ni interrupciones.

Una recta es la representación ideal del tiempo, que viene desde el menos infinito, se extiende hacia el infinito y que en cada punto de la recta representa un instante en el tiempo, un número real. Además, los días, las semanas, meses, años, lustros, décadas, siglos, milenios, etc. son intervalos de diferentes tamaños contenidos dentro del campo numérico real.



Al construir una gráfica del tiempo, las medidas se hacen a partir de un punto de referencia que como es lógico representa un instante. Podemos tomar como referencia el nacimiento de Cristo para considerar el momento cero, y en base a esto, ubicar instantes en el tiempo que se encuentran antes y después. Como por ejemplo el conocimiento de la utilidad del fuego para procurar de luz, calor y cocer alimentos, la construcción de las primeras ruedas, la escritura. Mientras que, la Revolución Francesa, la caída de la bolsa en Wall Street, la sanción de la Ley de Convertibilidad del Austral, se produjeron en momentos de tiempo posteriores.

Definición de Recta Numérica o Recta Real:

La recta numérica o recta real es un gráfico unidimensional de una línea recta, la cual contiene a todos los números reales mediante una correspondencia biunívoca, en donde se asocia cada número con un punto de la recta.



De esta manera, a cada punto sobre la recta le corresponde un número real único, y a cada número real le corresponde un único punto sobre la recta.

Para representar un punto en la recta, se selecciona un punto que representa el cero, llamado origen, luego se elige un segmento unidad, cuya medida se marca sucesivamente a la derecha y a la izquierda del cero. Las posiciones a la derecha del origen son consideradas positivas y a la izquierda negativas.



Una **variable** es una propiedad característica, susceptible de tomar diferentes valores, los cuales se pueden observar y medir. Las variables se pueden clasificar en: **cuantitativas**, aquellas que no se pueden medir numéricamente, como la nacionalidad, el color de la piel, el sexo y **cuantitativas**, aquellas que tienen un valor numérico, como la edad, el precio de un producto, los ingresos anuales de un consumidor. Estas últimas a su vez, pueden clasificarse en **discretas** o **continuas**. Las **discretas**, solo pueden tomar valores enteros, como por ejemplo el número de plantas atacadas por una peste, el número de crías por parición, los hermanos en una familia. **Continuas**, pueden tomar cualquier valor real dentro de un intervalo o rango, como el peso, el tiempo, el rendimiento de una empresa, etc.

ACTIVIDAD 1

Escribe a qué conjunto numérico Q (racional) o I (irracional) pertenece cada uno de los siguientes números:

$\sqrt{2} \in$	$1,434343 \dots \in$	$0,123456 \dots \in$	$-2 \in$
$1,1415 \in$	$35 \in$	$-53 \in$	$132 \in$
$1,89 \in$	$-2,565758 \dots \in$	$\sqrt{7} \in$	$\sqrt{81} \in$

1.1.3 Propiedades de las operaciones con números reales

Muchos de los errores que se cometen al operar con números reales surgen por desconocimiento u olvido de algunas de ellas.

Damos a continuación las propiedades básicas de las operaciones con números reales.

Comencemos con las **PROPIEDADES DE LA SUMA Y EL PRODUCTO DE NÚMEROS REALES**.

Para todos los números reales a, b y c , se cumplen las siguientes propiedades.



PROPIEDADES	EJEMPLO
$a + b = b + a$	$2 + 3 = 3 + 2$
$a \cdot b = b \cdot a$	$5 \cdot (-3) = (-3) \cdot 5 = -15$
$(a + b) + c = a + (b + c)$	$(2 + 3) + 5 = 2 + (3 + 5)$
$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$	$(3 \cdot 4) \cdot 5 = 3 \cdot (4 \cdot 5)$
$a + 0 = a$ y $0 + a = a$	$3 + 0 = a$ y $0 + 3 = 3$
$a \cdot 0 = 0$ y $0 \cdot a = 0$	$2 \cdot 0 = 0$ y $0 \cdot 2 = 0$
$a \cdot 1 = a$ y $1 \cdot a = a$	$5 \cdot 1 = 5$ y $1 \cdot 5 = 5$
$a + (-a) = (-a) + a = 0$	$4 + (-4) = (-4) + 4 = 0$
$a \cdot \frac{1}{a} = 1$ y $\frac{1}{a} \cdot a = 1$ si $a \neq 0$	$7 \cdot \frac{1}{7} = 1$ y $\frac{1}{7} \cdot 7 = 1$
$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$	$2 \cdot (3 + 4) = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 4$
$a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c$	$5 \cdot (2 - 4) = 5 \cdot 2 - 5 \cdot 4$

De todas las propiedades que hemos enunciado, trataremos especialmente algunas de las que ocasionan más errores al operar con dicho conjunto de números.

Comenzaremos con la:

1.1.3.1 Propiedad asociativa de la suma y el producto

En símbolos la propiedad se escribe:

$$\forall a, b \text{ y } c \in \mathbb{R}: (a + b) + c = a + (b + c) \text{ y } (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$

Significa que, tanto en la suma como en el producto, los números pueden agruparse en cualquier orden.



Veamos algunos ejemplos:

$$\checkmark \quad 2 + 3 + 4 = (2 + 3) + 4 = 2 + (3 + 4) = 9$$

$$\checkmark \quad 10 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} = 10 \cdot \left(3 \cdot \frac{1}{2}\right) = (10 \cdot 3) \cdot \frac{1}{2} = 15$$

Sin embargo, la propiedad asociativa no se verifica en el caso de la división, ni de la diferencia:

$$(16 : 4) : 2 = 4 : 2 = 2 \quad \neq \quad 16 : (4 : 2) = 16 : 2 = 8$$

$$(10 - 5) - 3 = 5 - 3 = 2 \quad \neq \quad 10 - (5 - 3) = 10 - 2 = 8$$

Otra de las propiedades de las operaciones con números reales que aplicaremos frecuentemente es la:

1.1.3.2 Propiedad distributiva del producto respecto a la suma y a la resta

Como su nombre lo indica, “distribuye” la operación producto “dentro” de la suma o la resta.

En símbolos la propiedad se escribe:

$$\forall a, b \text{ y } c \in \mathbb{R}: a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad \text{o} \quad (b + c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a$$

y

$$a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c \quad \text{o} \quad (b - c) \cdot a = b \cdot a - c \cdot a$$

Establece que si un número multiplica a la suma (ó resta) de otros, es posible resolver la suma (ó resta) y luego multiplicar el resultado por el factor ó multiplicar el factor por cada término de la



Advierte que ni la resta ni la división tienen esta propiedad, y esto es porque el orden en que se agrupan los números altera el resultado.

suma (ó resta) y por último sumar (ó restar) los resultados parciales.

Esta última opción es la que aplica la propiedad distributiva del producto respecto de la suma (ó resta) de números reales.



Veamos algunos ejemplos en los que efectuamos las opciones descritas precedentemente para que se aprecie que se arriba al mismo resultado.

$$\begin{aligned} & \checkmark \quad 2(3 + 5) = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 5 = 6 + 10 = 16 \quad \rightarrow \text{Distribuimos el factor 2} \\ & \checkmark \quad 2 \cdot 8 = 16 \quad \xrightarrow{\text{Resolvimos paréntesis primero el}} \\ & \checkmark \quad \frac{1}{4} \cdot (32 - 12 + 4) = \frac{32}{4} - \frac{12}{4} + \frac{4}{4} = 8 - 3 + 1 = 6 \quad \rightarrow \text{Distribuimos } \frac{1}{4} \\ & \checkmark \quad \frac{1}{4} \cdot (24) = \frac{24}{4} = 6 \quad \xrightarrow{\text{Resolvimos paréntesis primero el}} \end{aligned}$$



La propiedad anterior establece que el producto es distributivo respecto a la suma, por lo que no hay que confundir la propiedad en el otro sentido: La suma **NO es distributiva** respecto al producto. Es decir que si la operación a realizar es $2 + (3 \cdot 5)$, no confundirse queriendo aplicar la propiedad.

Seguidamente enunciamos otras propiedades que se relacionan con la regla de los signos y que sería importante recordar. Si a, b, c y d son números reales, (distintos de cero cuando figuran como denominador):



¡PRECAUCIÓN! Cuando intervienen más de dos factores se debe prestar atención a los signos que van asumiendo los resultados parciales. Si hay un número impar de factores negativos el resultado será negativo, si el número de factores con signo negativo es par, el resultado será positivo.



PROPIEDADES	EJEMPLO
$a - (-b) = a + b$	$2 - (-3) = 2 + 3 = 5$
$(-1) \cdot a = -a$	$(-1) \cdot 4 = -4$
$-(a + b) = -a - b$	$-(2 + 5) = -2 - 5 = -7$
$-(a - b) = -a + b$	$-(3 - 4) = -3 + 4 = 1$
$-(-a) = a$	$-(-9) = 9$
$(-a) \cdot b = -ab$	$(-8) \cdot 6 = -8 \cdot 6 = -48$
$(-a) \cdot (-b) = ab$	$(-2) \cdot (-4) = 2 \cdot 4 = 8$
$-a \cdot \left(\frac{1}{b}\right) = \frac{-a}{b} = -\frac{a}{b}$	$-3 \cdot \left(\frac{1}{4}\right) = \frac{-3}{4} = -\frac{3}{4}$
$\frac{a}{-b} = \frac{-a}{b} = -\frac{a}{b}$	$\frac{2}{-3} = \frac{-2}{3} = -\frac{2}{3}$

Por último, recordamos las siguientes propiedades:



PROPIEDADES	EJEMPLO
$\frac{0}{a} = 0$ con $a \neq 0$	$\frac{0}{3} = 0$
$a \left(\frac{b}{a}\right) = b$	$4 \left(\frac{5}{4}\right) = 5$
$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$	$\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{2 \cdot 3}{5 \cdot 4}$
$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{c} = \frac{a \cdot c}{b \cdot c} = \frac{a}{b}$	$\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{3} = \frac{2 \cdot 3}{5 \cdot 3} = \frac{2}{5}$

Esta última propiedad constituye la PROPIEDAD FUNDAMENTAL DE LAS FRACCIONES según la cual, si multiplicamos o dividimos numerador y denominador de una fracción por un mismo número (excepto el 0), obtenemos una fracción equivalente a la dada.





PROPIEDADES	EJEMPLO
$\frac{a}{c} \pm \frac{b}{c} = \frac{a \pm b}{c}$	$\frac{2}{4} \pm \frac{3}{4} = \frac{2 \pm 3}{4}$
$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm cb}{bd}$	$\frac{2}{4} \pm \frac{3}{5} = \frac{2 \cdot 5 \pm 3 \cdot 4}{4 \cdot 5}$
$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$	$\frac{\frac{2}{3}}{\frac{4}{5}} = \frac{2}{3} \div \frac{4}{5} = \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{4} = \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 4}$

Esta última propiedad, corresponde a un cociente de fracciones, que se resuelve realizando el producto de extremos sobre producto de medios, o también convirtiendo el cociente en multiplicación de la fracción que figura como numerador por la fracción inversa que figura en el denominador.



En general, el cero dividido por cualquier otro número, da como resultado 0, con la sola excepción de que el denominador también sea cero, ya que la expresión $\frac{0}{0}$ no tiene solución.

Si el cero aparece como divisor de cualquier cociente, la operación NO tiene solución.



Hemos recordado al conjunto de los números reales, sabemos qué operaciones podemos hacer con ellos y repasamos algunas de las propiedades más importantes.

¿Estamos en condiciones de comenzar a realizar operaciones con ellos y aplicar sus propiedades?

Creemos que sí, no obstante, nos parece importante que previo a ello te advirtamos sobre errores que por su frecuencia justifican que nos detengamos a considerarlos.

La revisión de algunos procedimientos que frecuentemente ocasionan errores, permitirá que reflexionemos sobre ellos para poder evitarlos.

La manipulación de números reales es esencial para tener éxito en matemática.



La llamada Ley de los signos se aplica tanto para el producto como para el cociente de números reales

LEY DE LOS SIGNOS	
Producto	Cociente
$(+) \cdot (+) = +$	$(+) : (+) = +$
$(-) \cdot (-) = +$	$(-) : (-) = +$
$(+) \cdot (-) = -$	$(+) : (-) = -$
$(-) \cdot (+) = -$	$(-) : (+) = -$



Antes de avanzar, piensa y responde: ¿es posible efectuar las siguientes divisiones: $\frac{a}{0}$ y $\frac{0}{a}$, con $a \neq 0$?

.....

Si aparece el cero como factor de un producto, cualquiera sea el número o el signo de los demás factores, anula todo el resultado. Si aparece en un cociente como dividendo, también el resultado es nulo.



Veamos los siguientes ejemplos:

✓ $3 \cdot 50 \cdot (-2) \cdot 0 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) = 0$

✓ $0 : 3 = \frac{0}{3} = 0$

Los siguientes ejemplos muestran que: **Si el cero aparece como divisor de un cociente, la operación NO tiene solución.**

✓ $-\frac{2}{0}$ **NO TIENE SOLUCIÓN**

No hay ningún real que multiplicado por cero nos de -2



✓
$$\frac{(-1) \cdot (-3) \cdot 15}{2 \cdot 0 \cdot (-4)}$$

NO TIENE SOLUCIÓN

Tampoco pudimos resolver este último cociente porque el cero anula el denominador y como la división por cero no existe, el cociente no puede resolverse.



Si se trata de una división de fracciones, se resuelve multiplicando el numerador de la primera fracción por el denominador de la segunda para formar el numerador del resultado y dividiéndola por el producto entre el denominador de la primera fracción por el numerador de la segunda.

Como regla general, en cuanto a la simplificación de fracciones, podemos afirmar que en la multiplicación de fracciones es posible simplificar numeradores con denominadores; en cambio, si se las divide, es posible simplificar numeradores y denominadores entre sí.

Recuerda que al multiplicar fracciones se obtiene una nueva fracción cuyo numerador es el resultado de multiplicar los numeradores y su denominador, el producto de los denominadores.



Resolvamos el siguiente producto de Fracciones:

✓
$$\frac{5}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{5 \cdot 4}{3 \cdot 5} = \frac{\cancel{5}^4}{3 \cdot \cancel{5}} = \frac{4}{3}$$

Hemos simplificado por 5, numerador y denominador

También se pudo haber simplificado antes de efectuar la operación

$$\frac{\cancel{5}^1}{3} \cdot \frac{4}{\cancel{5}_1} = \frac{4}{3}$$

Los dos procedimientos de simplificación son correctos y permiten arribar a igual resultado.



Consideremos el siguiente ejemplo:



✓ $\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{9} = \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 9} = \frac{8}{27} = \frac{8}{27} = \frac{3}{2}$ → Hemos simplificado por 6, numerador y denominador

También se pudo haber simplificado numeradores y denominadores entre sí, previo a efectuar el cociente y el resultado hubiese sido el mismo.

$$\frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{4}}{\frac{3}{3} \cdot \frac{9}{3}} = \frac{1 \cdot 3}{1 \cdot 2} = \frac{3}{2}$$

La misma operación pudo estar indicada con línea de fracción

✓ $\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{9} = \frac{8}{27} = \frac{3}{2}$ → Multiplicamos extremos y lo dividimos por el producto de los medios, por último, simplificamos por 6, numerador y denominador.

También se pudo haber simplificado antes de efectuar el cociente, extremos con medios.

Estas simplificaciones que redujeron en forma correcta, multiplicaciones y divisiones de fracciones, suelen trasladarse, erróneamente a operaciones de suma y resta de fracciones.



Veamos un ejemplo de suma de fracciones en donde cometimos un error muy común:

Procedimiento incorrecto.

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{5}$$

Es frecuente, el tratar de simplificar el 2 con el 4, por ser ambos divisibles por 2 y aparecer como numerador y denominador respectivamente, sin advertir que en este caso las fracciones están sumadas y que deberá resolverse sacando común denominador.

La única simplificación válida en operaciones de suma y resta de fracciones es cuando es posible reducir el numerador con el denominador de la misma fracción, y luego se resuelve a través del procedimiento de suma o resta de fracciones.

Veamos el **procedimiento correcto** del ejemplo dado:

✓ $\frac{1}{2} + \frac{4}{5} = \frac{\quad}{10}$

Primero buscar un denominador común que sea divisible por ambos denominadores

$(10 : 2) \cdot 1 = 5$ y $(10 : 5) \cdot 4 = 8$

Segundo, dividir ese denominador común por cada denominador para luego multiplicarlo por el numerador respectivo

Resolvemos la suma en el numerador

$\frac{1}{2} + \frac{4}{5} = \frac{5 + 8}{10} = \frac{13}{10}$

El proceso inverso también puede realizarse.



Por ejemplo:

✓ $\frac{-1 + 3 + 11 - 2}{5} = -\frac{1}{5} + \frac{3}{5} + \frac{11}{5} - \frac{2}{5} \rightarrow$

Si tenemos operaciones de suma o resta en el numerador con un denominador en común, podemos distribuir ese denominador en cada término del numerador

Si en el numerador tenemos un producto con un denominador común ¡CUIDADO!, el denominador no se distribuye en ese producto.



Observa el siguiente ejemplo:

$$\frac{5 \cdot 8}{10} \neq \frac{5}{10} \cdot \frac{8}{10}$$

$$\frac{40}{10} \neq \frac{40}{100}$$

Hemos visto que podemos distribuir un mismo denominador en una suma, pero si la suma está en el denominador, ¿es posible distribuir ese numerador?

¡ATENCIÓN! No es posible efectuar esa distribución



Por ejemplo:

$$\frac{3}{2 + 5} = \frac{3}{7} \neq \frac{3}{2} + \frac{3}{5} = \frac{15 + 6}{10} = \frac{21}{10}$$

RECUERDA: siempre debes prestar atención cuando operes con

números, pero presta especial atención cuando adviertas signos negativos, el cero, cuando quieras simplificar y cuando aparezcan fracciones.

Teniendo en cuenta las propiedades que repasamos, te proponemos resolver las actividades siguientes, comenzando con operaciones combinadas sencillas.



ACTIVIDAD 2: Resuelve las siguientes operaciones con números reales:

a) $\frac{2}{3} + 9 =$

b) $\frac{5}{3} \cdot 9 - \left(-\frac{1}{4}\right) =$

c) $4 \cdot (-2 + 5) =$

Avanzando un poco más con las operaciones con números reales, incluimos en este repaso los exponentes y radicales.



Observaciones para resolver actividades.

ATENCIÓN: Para resolver la suma o resta de fracciones se debe sacar común denominador. Nunca debes simplificar el denominador de un término con el numerador del otro término.

CUIDADO: Los signos + y - separan términos.

RECUERDA: Cuando tienes un factor que multiplica a una suma o resta debes aplicar la propiedad: **Distributiva** del producto con respecto a la suma o a la resta.

1.1.4 Exponentes y radicales

¿Recuerdas qué operación indica una potencia con exponente entero?

La expresión 2^3 es una potencia de base 2 y exponente 3 que se resuelve multiplicando tantas veces la base como lo indica el exponente.

Por ello:

$$2^3 = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2}_{\substack{\text{Multiplicamos} \\ 3 \text{ veces el } 2}} = 8$$

Recordemos las **PROPIEDADES BASICAS DE LOS EXPONENTE**



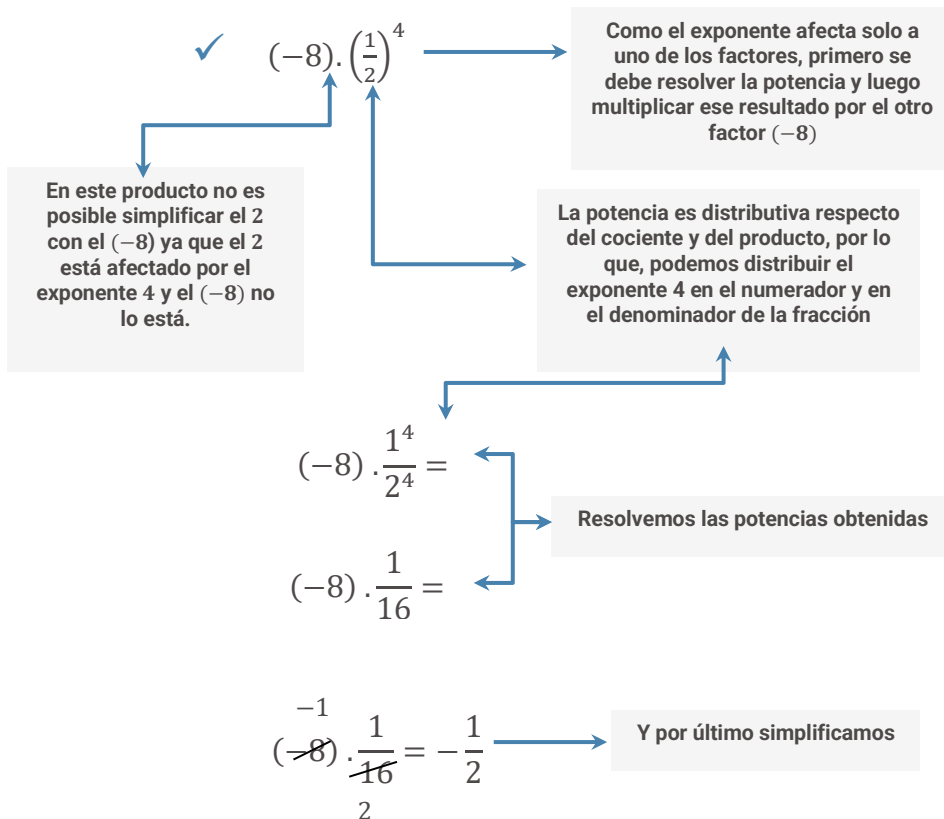
A veces suele confundirse la potencia con un simple producto y se resuelve 2^3 INCORRECTAMENTE como $2 \cdot 3 = 6$



PROPIEDADES	EJEMPLO
$x^n = x \cdot x \cdot x \cdot \dots \cdot x$	$2^5 = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}_{5 \text{ factores}}$
$x^n \cdot x^m = x^{n+m}$	$x^2 \cdot x^3 = x^{2+3} = x^5$ $2^3 \cdot 2^5 = 2^{3+5} = 2^8 = 256$
$x^0 = 1$ si $x \neq 0$	$2^0 = 1$
$x^{-n} = \frac{1}{x^n} = \frac{1}{\underbrace{x \cdot x \cdot x \cdot \dots \cdot x}_{n \text{ factores}}}$	$2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$
$\frac{1}{x^{-n}} = x^n$	$\frac{1}{x^{-5}} = x^5$ $\frac{1}{2^{-3}} = 2^3$
$\frac{x^m}{x^n} = x^{m-n} = \frac{1}{x^{n-m}}$	$\frac{2^{12}}{2^8} = 2^{12-8} = 2^4 = 16$ $\frac{2^8}{2^{12}} = 2^{8-12} = 2^{-4} = \frac{1}{16}$
$\frac{x^m}{x^m} = x^{m-m} = x^0 = 1$	$\frac{2^4}{2^4} = 1$
$(x^m)^n = x^{m \cdot n}$	$(x^5)^3 = x^{5 \cdot 3} = x^{15}$ $(2^3)^2 = 2^{3 \cdot 2} = 2^6 = 64$
$(x \cdot y)^n = x^n y^n$	$(2 \cdot 4)^3 = 2^3 4^3$
$\left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{x^n}{y^n}$	$\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{2^3}{3^3} = \frac{8}{27}$
$\left(\frac{x}{y}\right)^{-n} = \left(\frac{y}{x}\right)^n$	$\left(\frac{3}{4}\right)^{-2} = \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{16}{9}$



Veamos un ejemplo en el que aparece una potencia en uno de los factores de un producto:



Hemos recordado cómo se resuelven las potencias de exponente entero positivo, pero ¿qué sucede si el exponente es cero o un número entero negativo?

TODO número (excepto el cero) elevado al exponente 0, da por resultado 1.



Ejemplos:

$$\checkmark \quad 15^0 = 1$$

$$\checkmark \quad \left(-\frac{3}{2}\right)^0 = 1$$

$$\checkmark \quad 0^0 \quad \text{NO TIENE SOLUCIÓN.}$$

Si, en cambio, el exponente de la potencia es un número entero negativo, el procedimiento correcto para resolverlo consiste en elevar al inverso multiplicativo de la base al mismo exponente, pero con signo positivo.



¿Recuerdas cómo se obtienen los inversos multiplicativos o recíprocos?

El recíproco de $\frac{5}{4}$ es $\frac{4}{5}$

El de 3 es $\frac{1}{3}$

El de -3 es $-\frac{1}{3}$ (advierte que no cambiamos el signo)

El de 1 es $\frac{1}{1} = 1$

El de 0 **NO EXISTE** porque sería $\frac{1}{0}$ y la división por cero no está definida.



Resolvamos, por ejemplo, una potencia con exponente negativo.

$$\checkmark \left(\frac{2}{5}\right)^{-2} = \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{5^2}{2^2} = \frac{25}{4}$$



Veamos otro ejemplo combinando el producto y el exponente negativo.

$$\checkmark \left[(-7) \cdot \frac{2}{3}\right]^{-2} =$$

$$= (-7)^{-2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{-2}$$

Como la potencia es distributiva respecto del producto, primero se distribuyó el exponente (-2) en cada uno de los factores de la base

$$= \left(-\frac{1}{7}\right)^2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2$$

Como el exponente de las potencias tiene signo negativo se tomó el recíproco de cada factor y se lo elevó al exponente 2.

$$= \frac{1}{49} \cdot \frac{9}{4} = \frac{9}{196}$$

Aclaración: también se pudo haber resuelto este ejemplo de esta otra forma:

$$\begin{aligned} & \left[(-7) \cdot \frac{2}{3} \right]^{-2} = \\ & = \left(-\frac{14}{3} \right)^{-2} = \left(-\frac{3}{14} \right)^2 = \frac{9}{196} \end{aligned}$$

Primero se resuelve el producto dentro del corchete, luego se eleva a (-2) este resultado parcial; como el exponente (-2) es negativo, se eleva al exponente 2 el recíproco del resultado parcial y por último se calcula la potencia.

A medida que se van combinando operaciones, se acrecienta la posibilidad de cometer errores, sobre todo al operar con signos y al efectuar simplificaciones incorrectas, por ello es conveniente realizar paso a paso cada operación, por lo menos hasta adquirir la práctica suficiente.



Hemos recordado cómo se resuelve una potencia que tiene por exponente un número entero, pero ¿qué sucede si en la potencia aparece un exponente fraccionario? ¿Cómo resolvemos, por ejemplo, la potencia $4^{3/2}$?



PROCEDIMIENTO: una potencia de exponente fraccionario da origen a una raíz de índice igual al denominador de la fracción y que tiene como radicando a la base de la potencia, que queda elevada a un exponente igual al numerador de la fracción.

$$\text{En nuestro ejemplo } 4^{3/2} = \sqrt[2]{4^3} = \sqrt[2]{64} = 8$$

La potencia de exponente fraccionario da origen a una raíz.

Extraer la raíz a un número es encontrar otro, tal que elevado al índice de la raíz permita obtener el radicando. Es decir que, para resolver estas potencias de exponentes fraccionarios, debemos saber resolver raíces.

Recordemos, entonces, las **PROPIEDADES BASICAS DE LOS RADICALES**



PROPIEDADES	EJEMPLO
$x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$	$3^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{3}$ $8^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{8} = 2$
$x^{-\frac{1}{n}} = \frac{1}{x^{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{\sqrt[n]{x}}$	$4^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{4^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2}$
$\sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{x \cdot y}$	$\sqrt[3]{9} \cdot \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{9 \cdot 2} = \sqrt[3]{18}$ $\sqrt[3]{9} \cdot \sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{9 \cdot 3} = \sqrt[3]{27} = 3$
$\frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}} = \sqrt[n]{\frac{x}{y}}$	$\frac{\sqrt[3]{80}}{\sqrt[3]{10}} = \sqrt[3]{\frac{80}{10}} = \sqrt[3]{8} = 2$
$\sqrt[m]{\sqrt[n]{x}} = \sqrt[m \cdot n]{x}$	$\sqrt[3]{\sqrt[4]{2}} = \sqrt[12]{2}$
$x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m} = (\sqrt[n]{x})^m, m \neq n$	$8^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{8^2} = (\sqrt[3]{8})^2 = 2^2 = 4$
$(\sqrt[n]{x})^n = x$	$(\sqrt[8]{7})^8 = 7$



- Cuando no se indica el índice de la raíz, se interpreta que el índice es 2 (también se la conoce como raíz cuadrada).
- La radicación al igual que la potencia es distributiva con respecto al producto y al cociente.



Resolvamos mentalmente algunas raíces sencillas:

✓ $\sqrt[3]{8} = 2$ porque $2^3 = 8$

✓ $\sqrt[4]{81} = 3$

✓ $\sqrt[5]{1} = 1$

✓ $\sqrt{\frac{4}{25}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{25}} = \frac{2}{5}$



Veamos un ejemplo de combinaciones sencillas de exponentes y radicales:

$$\checkmark \frac{\sqrt[3]{\frac{1}{8}} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{-2}}{\sqrt{1 + \frac{5}{4}} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)} =$$

Iremos resolviendo paso a paso las operaciones, para que se adviertan los pasos que vamos ejecutando:

$$\frac{\sqrt[3]{\frac{1}{8}} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{-2}}{\sqrt{1 + \frac{5}{4}} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot 16}{\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{6}}$$

Para resolver el producto del numerador, primero se debe extraer la raíz cúbica de uno de los factores y resolver la potencia del otro factor

$$\sqrt[3]{\frac{1}{8}} = \frac{1}{2}$$

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{-2} = \left(\frac{4}{1}\right)^2 = 16.$$

Mientras tanto, en el denominador se deberá resolver la raíz

cuadrada de la suma $\sqrt{1 + \frac{5}{4}} = \sqrt{\frac{4+5}{4}} = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}$

y luego multiplicar el resultado por $\frac{1}{6}$

$$\frac{\sqrt[3]{\frac{1}{8}} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{-2}}{\sqrt{1 + \frac{5}{4}} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot 16}{\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{6}} = \frac{8}{\frac{1}{4}} = 32$$

Simplificando los productos de fracciones y resolviendo la última fracción obtenida, se llega al resultado definitivo

Hasta aquí hemos desarrollado un breve repaso de las operaciones con números reales, describiendo a través de ejemplos los procedimientos más comunes y advirtiendo sobre los errores más frecuentes.

Para que ejercites los temas vistos, te proponemos resolver las siguientes operaciones con números reales:



¡ATENCIÓN!

La radicación al igual que la potenciación NO es distributiva respecto de la suma, por lo que primero se debe resolver la suma y luego extraerle la raíz al resultado parcial.



ACTIVIDAD 3: Resuelve las siguientes operaciones con números reales:

a) $\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{3} + \frac{1}{5} : 3 - \frac{1}{5} \cdot 5 =$

b) $\frac{1}{9} \cdot \frac{3}{2} - \frac{1}{7} \cdot \frac{7}{3} + \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) =$

c) $\left(\frac{4}{3}\right)^{-1} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 : \left(\frac{3}{4}\right)^{-2} =$

d) $(-2)^{-2} \cdot (-2)^{-3} : (-2)^{-1} =$

e) $\frac{2^7 : 2^4 : 2^{-3}}{(2^4 \cdot 2^5)^2 : 2^7} =$

f) $\sqrt[4]{(-2)^{-6} \cdot (-2)^8 \cdot (-2)^2} =$

g) $\sqrt{\frac{49}{121}} \cdot \sqrt{\frac{25}{4}} - 4 \cdot \left(\frac{7}{22}\right)^{-1} =$

h) $\frac{\frac{2}{5} - \left(-\frac{1}{3}\right)}{-\frac{11}{5}} =$

i) $\frac{-\frac{2}{3} \left(\frac{3-1}{2-3}\right)}{-1} =$

j) $\frac{\left(2-\frac{3}{4}\right)^2 - 3}{\left(\frac{1}{3}+4^2\right)^{-1}} =$

k) $\frac{\left(\frac{1}{3}-1\right)^2}{\sqrt{\frac{11}{25}+1}} \cdot (-12) =$

1.2 Expresiones Algebraicas

1.2.1. Expresiones algebraicas racionales.

En esta Unidad, vamos a trabajar con expresiones algebraicas, que son aquellas en las que figuran números y letras relacionadas por las operaciones aritméticas.

De acuerdo a las operaciones que intervienen, se las clasifican en expresiones algebraicas racionales e irracionales.

Nos dedicaremos al repaso de las expresiones racionales.

Las expresiones algebraicas **RACIONALES** son aquellas en las cuales algunas de sus variables forman parte del denominador o figuran en el numerador con exponente entero.



Por ejemplo, son expresiones algebraicas racionales:

$$x + \frac{1}{y} ; 3x^{-3} + 2 ; x^2 - 4$$

A su vez las Expresiones Algebraicas Racionales se dividen en dos grupos: las **Enteras** y las **Fraccionarias**.

Comenzaremos con las Expresiones Algebraicas Enteras:

1.2.1.1. Expresiones algebraicas enteras

Se llama expresión algebraica entera a toda combinación de números y letras relacionadas a través de las operaciones de **adición**, **sustracción**, **multiplicación** y **potenciación** con exponente natural. Por ende, en estas expresiones no aparece ninguna letra en el denominador ni afectada por una raíz o por un exponente negativo.



Ejemplos de expresiones algebraicas enteras:

- ✓ $3x^3 + 2x^2 - 3x + 1$ es una expresión algebraica **entera** en la variable x .
- ✓ $(x + y)^3 - x \cdot y$ es una expresión algebraica **entera** en las variables x e y .

Clasificación de expresiones algebraicas enteras

Las expresiones algebraicas enteras las clasificamos en monomios y polinomios:

Monomio: Es toda expresión algebraica entera constituida por un sólo término. Las letras solamente están afectadas por operaciones de producto y de potencia de exponente natural.



Por Ejemplo: $-3a^3b^2c$

Es un monomio constituido por el número negativo, -3 , que recibe el nombre de "coeficiente" y la "parte literal": a^3b^2c . Puede observarse que las operaciones involucradas son la multiplicación y la potencia de exponente natural.

Monomios semejantes: Son los que tienen igual parte literal (las mismas letras elevadas a los mismos exponentes).



Por Ejemplo: $-3a^3b^2c$ es semejante a $5a^3b^2c$

Polinomio: Es una expresión algebraica entera compuesta por la suma algebraica (suma y/o resta) de monomios no semejantes.



Por ejemplo: $3ax^3 + 2bx^2 - 5x + 8$

Es posible realizar operaciones con las expresiones algebraicas enteras, aplicando las mismas propiedades que vimos en los modelos numéricos.

Operaciones con expresiones algebraicas enteras.

Comencemos con las **SUMAS ALGEBRAICAS**



PROCEDIMIENTO: Primero se suman los monomios semejantes que, como dijimos, son aquellos que tienen la misma parte literal y difieren sólo en sus coeficientes. Luego de esta asociación, tenemos la suma de monomios no semejantes, dando por resultado el polinomio.



Algunos ejemplos:

$$\checkmark \quad 2xy^3 + 5xy^3 = 7xy^3$$



Sumamos los monomios semejantes

$$\checkmark \quad (3x^2y - 2x + 1) + (4x^2y + 6x - 3) =$$

Como en este caso existen paréntesis que agrupan términos, lo primero que debemos hacer es suprimirlos, recordando que si están precedidos por el signo más (+) las operaciones indicadas dentro del paréntesis siguen igual y si las precede un signo menos (-) se deberán cambiar los signos comprendidos dentro del paréntesis

$$3x^2y - 2x + 1 + 4x^2y + 6x - 3$$

Asociamos los términos semejantes: $3x^2y$ con $4x^2y$; $-2x$ con $6x$, 1 con -3 y los sumamos.

$$= 7x^2y + 4x - 2$$

Resultado final, al no poder seguir operando con la expresión

Otro ejemplo más:

$$\begin{aligned}
 & \checkmark -2xy + y^2 + 5 - (3y^2 + xy) + x = \\
 & = -2xy + y^2 + 5 - 3y^2 - xy + x \\
 & = -3xy - 2y^2 + 5 + x
 \end{aligned}$$

Suprimimos el paréntesis cambiando el signo de los términos que figuran dentro de él

Sumamos o restamos los términos semejantes

Este último es el resultado final ya que no es posible realizar ningún otro cálculo con términos que NO son semejantes.

Avanzando con otras operaciones, veremos la **MULTIPLICACIÓN DE EXPRESIONES ALGEBRAICAS.**



PROCEDIMIENTO: la propiedad distributiva es la herramienta clave para multiplicar expresiones algebraicas. Se las resuelve multiplicando término a término y por último se suman los términos semejantes.



Veamos un ejemplo en el que se multiplican dos expresiones algebraicas:

$$\begin{aligned}
 & \checkmark (2x + y)(-y + x) = \\
 & = 2x(-y) + 2xx + y(-y) + yx = \\
 & = -2xy + 2x^2 - y^2 + yx \\
 & = -xy + 2x^2 - y^2
 \end{aligned}$$

Se realiza el producto de una de las sumas por la otra, aplicando la propiedad distributiva del producto respecto a la suma

Se aplica regla de signos del producto y propiedades del producto de potencias de igual base

Se asocian y suman o restan los términos semejantes

Otro ejemplo:

$$\begin{aligned} & \checkmark (x-1)(x^3 - y + xy) = \\ & = xx^3 - xy + xxy - 1x^3 + 1y - 1xy \\ & = x^4 - xy + x^2y - x^3 + y - xy = \\ & = x^4 - 2xy + x^2y - x^3 \end{aligned}$$

Comenzamos multiplicando los términos del primer paréntesis por los del segundo o a la inversa porque el orden de los factores NO altera el producto.

Efectuamos el producto de la x del primer paréntesis por cada término del segundo paréntesis (prestar atención a los signos) y luego hacemos lo mismo con el -1.

Se resuelven los productos de cada término cuando sea posible: $xx^3 = x^4$; $xxy = x^2y$, sumando o restando los términos semejantes.



ACTIVIDAD 4: Resuelve las siguientes operaciones con expresiones algebraicas:

- | | |
|---------------------------------|------------------------------------|
| a) $x + x =$ | b) $x^2 + x^2 =$ |
| c) $2x + 2x =$ | d) $2x^2 + 2x^2 =$ |
| e) $x \cdot x =$ | f) $x^2 \cdot x^2 =$ |
| g) $2x \cdot 2x =$ | h) $2x^2 \cdot 2x^2 =$ |
| i) $(2x + 5) \cdot (-8x + 4) =$ | j) $2x^2 + 5x + 2 - (4x^2 - 3x) =$ |

1.2.1.1.1. Productos notables.

Hay productos de expresiones algebraicas que por la frecuencia con que aparecen se los denomina **ESPECIALES** ó **NOTABLES** y que por el mismo motivo es muy conveniente incluirlos en este repaso.



CUADRADO DE UN BINOMIO

En símbolos:

$$(x + a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$$

$$(x - a)^2 = x^2 - 2ax + a^2$$

Binomio: porque es la suma (ó resta) de dos términos no semejantes.

Cuadrado: porque aparece elevado al exponente 2.



PROCEDIMIENTO: el resultado es el cuadrado del primer término más (ó menos) el doble producto del primer término por el segundo más el cuadrado del segundo término.

Procedimiento
correcto

$$(x + a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$$

Procedimiento incorrecto

Porque la potencia NO es distributiva con respecto a la suma (ó la resta).

El procedimiento correcto surge de multiplicar término a término la expresión algebraica de la base por sí misma:

$$✓ (x + a)^2 = (x + a) \cdot (x + a) = x^2 + 2ax + a^2$$

$$✓ (x - a)^2 = (x - a) \cdot (x - a) = x^2 - 2ax + a^2$$



Desarrollemos el cuadrado del siguiente binomio:

$$✓ (x - 5)^2 = x^2 - 2 \cdot x \cdot 5 + 5^2 = x^2 - 10x + 25$$



ACTIVIDAD 5: Desarrolla las siguientes expresiones:

a) $(2 - x)^2 =$

b) $(2x + 1)^2 =$



PRODUCTO DE UNA SUMA Y UNA DIFERENCIA

En símbolos:

$$(x + a) \cdot (x - a) = x^2 - a^2$$

Esta igualdad puede verificarse efectuando la multiplicación y cancelando los términos iguales con signos opuestos:

$$(x + a) \cdot (x - a) = x^2 - xa + ax - a^2 = x^2 - a^2$$



PROCEDIMIENTO: La suma por la diferencia de dos bases es igual a la diferencia de los cuadrados de las bases.



Por ejemplo:

✓ $(x + 2) \cdot (x - 2) = x^2 - 4$

También es frecuente que se deba desarrollar el procedimiento inverso de escribir la expresión algebraica como producto de sus factores utilizando:



Los productos notables son igualdades que se denominan **identidades**, dado que se verifican para **cualquier valor** que se les asignen a sus letras.

1.2.1.1.2. Reglas de factorización

Las más utilizadas son:

FACTOR COMÚN

En símbolos:

$$ax + ay = a \cdot (x + y)$$

Es decir, se trata de la recíproca de la propiedad distributiva del producto respecto a la suma (ó a la resta).



Por ejemplo

$$2x^2 + 4x = 2x \cdot (x + 2)$$

Como la expresión $2x$ se repite en los dos términos, se extrae como factor común, que multiplica a $(x + 2)$.

La expresión $(x + 2)$ se obtiene de dividir cada término del primer miembro por el factor común, así: $2x^2 \div 2x = x$ y $4x \div 2x = 2$

TRINOMIO CUADRADO PERFECTO

En símbolos:

$$x^2 + 2ax + a^2 = (x + a)^2$$

$$x^2 - 2ax + a^2 = (x - a)^2$$

Si identificamos un trinomio cuadrado perfecto, podemos indicarlo como el cuadrado de la suma (o resta) de sus bases.



Por ejemplo, la expresión:

$$\checkmark 4 + 4z + z^2 = (2 + z)$$



Es un trinomio cuadrado perfecto, porque tenemos dos términos elevados al cuadrado: 2 y z y un tercer término que es el doble producto de los otros dos: $2 \cdot 2 \cdot z = 4z$.

Sin embargo:

$9 + 2y + y^2 = \text{NO}$ es un trinomio cuadrado perfecto



Porque a pesar de que tiene tres términos y existen dos términos que aparecen elevados al cuadrado (3 e "y"), no aparece el doble producto del primero por el segundo: $2 \cdot 3 \cdot y = 6y$.



ACTIVIDAD 6:

Factoriza las siguientes expresiones.

a) $x^2 - 2x + 1 =$

b) $4x^2 + 16x + 16 =$

DIFERENCIA DE CUADRADOS

En símbolos:

$$x^2 - a^2 = (x + a) \cdot (x - a)$$

La diferencia (¡atención!, **NO** la suma) de dos términos cuadrados pueden expresarse como el producto de la suma por la diferencia de sus bases.



Por ejemplo:

$$✓ \quad 16 - x^2 = (4 + x) \cdot (4 - x)$$

A continuación, te proponemos una Actividad Integradora de estos **Productos Notables**.



ACTIVIDAD 7: Desarrolla o factoriza, según corresponda, cada una de las siguientes expresiones:

a) $(3 - 2x)^2 =$

b) $4x^2 - 36 =$

c) $2x^2 + 8x + 8 =$

d) $16x^4 - 16x^2 =$

Hemos analizado la suma y el producto de expresiones algebraicas, pero puede suceder que debamos considerar expresiones tales como:

$$\frac{8}{x-1} ; \frac{2+3x}{6x}$$



en donde la variable aparece en el denominador

Estas expresiones se denominan: **EXPRESIONES ALGEBRAICAS FRACCIONARIAS**, e implican cocientes:

1.2.1.2. Expresiones algebraicas fraccionarias

Las expresiones algebraicas fraccionarias son cocientes de polinomios.

En símbolos:

Expresiones Algebraicas Fraccionarias tienen la forma:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}$$

donde $P(x)$ y $Q(x)$ son **POLINOMIOS**.



Ejemplos de expresiones algebraicas FRACCIONARIAS:

✓ $\frac{3x^3+2x^2-3x+1}{3x^2+2x-3}$

✓ $\frac{2x^4-8}{x-2}$



¡ATENCIÓN! No existe una regla que sea aplicable en cada caso. Dependerá mucho de tu ingenio reconocer qué regla de factorización o qué producto notable conviene aplicar en el caso específico de manera de simplificar la expresión y arribar al resultado.

Operaciones con expresiones algebraicas fraccionarias.

Las reglas que guían las operaciones con expresiones algebraicas fraccionarias son las mismas reglas de las fracciones, también nombradas en este material.



Veamos algunos ejemplos en los que debamos resolver expresiones algebraicas fraccionarias:

1° se saca factor común en el numerador del primer factor y en el denominador del segundo factor

$$\frac{3x+9}{6} \cdot \frac{18}{5x+15} = \frac{3 \cdot \cancel{(x+3)}}{\cancel{6}} \cdot \frac{\cancel{3} \cdot 18}{5 \cdot \cancel{(x+3)}} = \frac{3 \cdot 3}{5} = \frac{9}{5}$$

2° se simplifican los factores del numerador con los del denominador, o sea, $(x+3)$ con $(x+3)$ y el 18 con el 6; luego se multiplica derecho.



Veamos otro ejemplo resuelto:

Se resolvió la suma del numerador.

$$\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x^2-1} = \frac{(x-1)+1}{x^2-1} = \frac{x}{x^2-1}$$

Se buscó un común denominador para los dos sumandos, recuerda que $x^2 - 1 = (x - 1) \cdot (x + 1)$



ADVIERTE que en el resultado no se pudo simplificar las x del numerador y denominador ya que la x^2 está afectada por la resta del 1, no por el producto.

Seguidamente te proponemos algunas actividades que incluyen operaciones con expresiones algebraicas racionales, junto a casos de factoro, para reafirmar los temas repasados.

¡A PRACTICAR !



ACTIVIDAD 8: Factoriza, resuelve y simplifica, según corresponda:

a) $\frac{x^2+8x+16}{x+4} =$

b) $\frac{x-2}{x+2} - \frac{x+2}{x-2} =$

c) $\frac{4x^5-4x}{9x^6-9x^2} =$

d) $\frac{x^2-4}{x^2+2x} \cdot \frac{x^2}{x-2} =$

e) $\frac{2x+x^2}{x} : \frac{x^2}{2-x} =$

f) $\frac{\frac{4x}{x^2-1}}{\frac{2x^2+8x}{x-1}} =$

1.3. Razones y proporciones:

Razón: es el cociente de dos números en un cierto orden, distinto de cero.

Proporción: Dados cuatro números distintos de cero, en un cierto orden, constituyen una proporción si la razón de los dos primeros es igual a la razón de los dos segundos.

$$\left. \begin{array}{l} \text{si } \frac{a}{b} = m \\ \text{y } \frac{c}{d} = m \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ Proporción}$$

a, b, c, d

se lee: a es de b como c es de d

Ejemplo: 6,4,3,2

$$\left. \begin{array}{l} \text{si } \frac{6}{4} = 1,5 \\ \text{y } \frac{3}{2} = 1,5 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \text{ Proporción}$$

Clasificación

✓ Proporción ordinaria

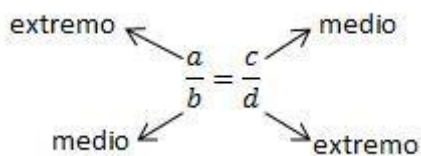
$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} ; \frac{7}{8} = \frac{14}{16}$$

✓ Proporción continúa

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c} ; \frac{4}{6} = \frac{6}{9}$$

Una proporción es continua cuando sus medios son iguales.

Términos de una proporción



Propiedades de las proporciones

- ✓ En toda proporción, el producto de los extremos es al producto de los medios.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad a \cdot d = b \cdot c \quad \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \quad \frac{6 \cdot 2}{12} = \frac{4 \cdot 3}{12}$$

- ✓ La suma del antecedente y consecuente de la primera razón es su antecedente como la suma del antecedente y consecuente de la segunda razón es su antecedente.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad \frac{a+b}{a} = \frac{c+d}{c} \quad \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \quad \frac{6+4}{6} = \frac{3+2}{3} \quad \frac{10}{6} = \frac{5}{3} \quad 10 \cdot 3 = 6 \cdot 5 \quad 30 = 30$$

- ✓ La suma del antecedente y consecuente de la primera razón es su consecuente como la suma del antecedente y consecuente de la segunda razón es su consecuente.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d} \quad \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \quad \frac{6+4}{4} = \frac{3+2}{2} \quad \frac{10}{4} = \frac{5}{2} \quad 20 = 20$$

- ✓ La diferencia del antecedente y consecuente de la primera razón es su antecedente como la diferencia del antecedente y consecuente de la segunda razón es su antecedente.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad \frac{a-b}{a} = \frac{c-d}{c} \quad \frac{6-4}{6} = \frac{3-2}{3} \quad \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \quad 6 = 6$$

- ✓ La diferencia del antecedente y consecuente de la primera razón es su antecedente como la diferencia como la diferencia del antecedente y consecuente de la segunda razón es su consecuente.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad \frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d} \quad \frac{6-4}{4} = \frac{3-2}{2} \quad \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \quad 4 = 4$$

- ✓ La suma de antecedente y consecuente de la primera razón es su diferencia como la suma de antecedente y consecuente de la segunda razón su diferencia.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad \frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d} \quad \frac{6+4}{6-4} = \frac{3+2}{3-2} \quad \frac{10}{5} = \frac{5}{1} \quad 10 = 10$$

- ✓ La diferencia de antecedente y consecuente de la primera razón es la suma como la diferencia de antecedente y consecuente de la segunda razón es su suma.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad \frac{a-b}{a+b} = \frac{c-d}{c+d} \quad \frac{6-4}{6+4} = \frac{3-2}{3+2} \quad \frac{2}{10} = \frac{1}{5} \quad 10 = 10$$

Hallar el valor de un extremo

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$$

De acuerdo con la primera propiedad $a \cdot x = b \cdot c$

Haciendo pasaje al otro miembro:

$$x = \frac{b \cdot c}{a}$$

En toda proporción, un extremo es igual al producto de los medios divididos por el otro extremo.

$$\frac{5}{6} = \frac{10}{x} \quad x = \frac{6 \cdot 10}{5}; x = 12$$

$$\frac{x}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow x = \frac{d \cdot c}{b}$$

$$\frac{x}{6} = \frac{10}{12} \Rightarrow x = \frac{6 \cdot 10}{12} = 5; x = 5$$

Hallar el valor del medio de una proporción

En toda proporción, el medio es igual al producto de los extremos dividido por el medio conocido.

$$\frac{a}{b} = \frac{x}{d} \Rightarrow x = \frac{a \cdot d}{b}$$

$$\frac{5}{6} = \frac{x}{12} \Rightarrow x = \frac{5 \cdot 12}{6} = 10 \quad x = 10$$

UNIDAD N°0: II PARTE

ECUACIONES, INECUACIONES Y SISTEMA DE ECUACIONES

Objetivos:

Al finalizar esta segunda unidad deberás ser capaz de:

- ✓ Resolver ecuaciones cuadráticas usando la fórmula cuadrática.
- ✓ Resolver ecuaciones e inecuaciones lineales y representar el conjunto solución en la recta numérica.
- ✓ Resolver sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas por distintos métodos.

Contenidos:

UNIDAD N°1:

ECUACIONES, INECUACIONES Y SISTEMAS DE ECUACIONES

2.1 Ecuaciones

2.1.1 Ecuaciones con una incógnita

2.1.1.1 Ecuaciones lineales con una incógnita

2.1.2 Ecuaciones cuadráticas

2.1.3 Ecuaciones con dos incógnitas

2.2 Inecuaciones

2.3 Sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas

2.1 Ecuaciones

Las representaciones son las figuras o ideas que sustituyen a la realidad y que nos permiten comunicarnos. Así, cuando en una empresa, queremos establecer la relación entre los costos variables y los fijos, hacemos una representación de tales costos, y para ello nos valemos del concepto matemático de ecuaciones. Pues, representar tales costos, se reduce a encontrar uno o algunos números que cumplan con ciertas condiciones, susceptibles de ser expresados por medio de igualdades y que representen tales costos. Estas igualdades, que satisfacen los costos desconocidos, se llaman ecuaciones.

En esta unidad trabajaremos con ecuaciones lineales, cuadráticas, también con sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas y con inecuaciones.

2.1.1. Ecuaciones con una incógnita

Una ecuación es una igualdad entre dos expresiones algebraicas que se transforma en igualdad numérica cuando se atribuyen a las letras que figuran en la igualdad algebraica valores numéricos particulares.

Resolver una ecuación es encontrar los valores de sus variables para los cuales la ecuación se verifica.

Los valores particulares que asumen las letras para que una ecuación se convierta en una igualdad numérica son las raíces de la ecuación.



¿Adviertes la diferencia que existe entre una identidad y una ecuación?

.....

.....

.....

.....

2.1.1.1 Ecuaciones lineales con una incógnita

Una ecuación lineal con una incógnita, es aquella igualdad que posee la incógnita elevada al exponente 1.

Por ejemplo: $5x + 2 = -3$, es una ecuación lineal, porque la incógnita, x , está elevada al exponente 1.

La solución es: $x = -1$ porque $5 \cdot (-1) + 2 = -3$



ACTIVIDAD 9: Resuelve las siguientes ecuaciones y verifica las soluciones:

a) $3(x + 2) = 2(x + 3)$

b) $(x - 5)^2 - (1 + x)(x - 1) = 2(5x + 3)$

En Ciencias Económicas, usaremos las ecuaciones para resolver situaciones problemáticas que se plantearan en forma coloquial. Para poder resolverlas y aplicar el herramental matemático adecuado necesitaremos traducir ese lenguaje coloquial al simbólico.

Del Lenguaje Coloquial al Matemático

El lenguaje matemático es un código tal como lo es el lenguaje coloquial (con el que hablas todos los días). En matemática, no sólo podemos utilizar una letra como número generalizado sino también tenemos la posibilidad de representar con letras tanto incógnitas, como a variables y constantes. La complicación se presenta cuando debemos pasar a lenguaje matemático una estructura de relaciones vinculadas con cierta complejidad entre los datos conocidos y lo que se quiere averiguar.

Para facilitarte la resolución de los distintos problemas propuestos en este módulo, te sugerimos, que frente a cada uno trata de ayudarte con algunas preguntas, tales como:

- ✓ ¿Qué es lo que se quiere averiguar?, o expresado formalmente: ¿Cuál es la incógnita?
- ✓ ¿Cuáles son los datos disponibles?
- ✓ ¿Qué relación vincula los datos con las incógnitas?
- ✓ ¿Qué está permitido hacer?, en otras palabras: ¿Qué propiedades conocemos y que pueden utilizarse para resolver eficazmente la situación planteada?
- ✓ ¿El conjunto solución hallado, da respuesta al problema planteado?

Encontrar la solución de una ecuación es, con frecuencia, tarea fácil; en cambio, plantear la ecuación sobre la base de los datos de un problema suele ser más complejo.

Seguidamente te sugerimos algunas pautas que te ayudarán a resolver un problema.



ETAPAS EN LA RESOLUCIÓN DE UN PROBLEMA

Etapas 1: PLANTEO del problema en lenguaje Matemático.

Elegir las variables cuya determinación es suficiente para responder a la situación planteada y traducir en ecuaciones las condiciones impuestas al o los valores buscados.

Etapas 2: RESOLUCIÓN de la o las Ecuaciones.

Calcular los valores que satisfacen las ecuaciones. En otras palabras, despejar la /s incógnita /s de las ecuaciones planteadas.

Etapas 3: INTERPRETACIÓN de la Solución.

Discutir si las soluciones halladas satisfacen el modelo, es decir, si los valores hallados son compatibles con el problema enunciado.

2.1.2. Ecuaciones cuadráticas

Una ecuación de segundo grado o ecuación cuadrática es una igualdad en donde la incógnita aparece elevada al cuadrado.

Por ejemplo la ecuación $x^2 + 2x = 0$, es una ecuación cuadrática, porque la incógnita "x" aparece elevada al cuadrado.



Resolvamos paso a paso la ecuación:

$$x^2 + 2x = 0$$

$$x \cdot (x + 2) = 0$$

Sacamos factor común x en el primer miembro y nos queda un producto de dos factores cuyo resultado es cero

$$x = 0 \quad \text{ó} \quad (x + 2) = 0$$

$$x = 0 \quad \text{ó} \quad x = -2$$

Para que el resultado de dicho producto se anule existen dos alternativas: $x = 0$ ó $(x + 2) = 0$, por lo que $x = -2$

Y esas son las dos soluciones de la ecuación de segundo grado, ya que, si reemplazamos dichos valores en la ecuación, se verifica la igualdad.



Veamos otro ejemplo:

$$\checkmark \quad 2x^2 - 2x - 4 = 0$$

En este caso no podemos proceder como en el caso anterior que sacamos factor común x , ya que existe un término que no lo tiene.

Para estos casos y en general para resolver cualquier ecuación cuadrática, existe una fórmula general, que seguramente la recordarás por haberla aplicado muchas veces en la resolución de distintas actividades:

FÓRMULA CUADRÁTICA

(también denominada Fórmula Resolvente)

Las soluciones de la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$, donde $a \neq 0$ (es a distinto de cero), están dadas por:

$$x_i = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

¿La recuerdas?

De la aplicación de dicha fórmula pueden surgir, dos raíces reales distintas, dos raíces reales iguales o dos raíces imaginarias según el signo que asuma la expresión que está debajo de la raíz cuadrada.



- ✓ Si $b^2 - 4ac > 0$ obtendremos dos raíces reales distintas.
- ✓ Si $b^2 - 4ac = 0$ obtendremos dos raíces reales iguales.
- ✓ Si $b^2 - 4ac < 0$ obtendremos dos raíces imaginarias.

Este caso no lo desarrollaremos porque ya dijimos que trabajaremos con el conjunto de números reales.



Retomando nuestro ejemplo, si debemos resolver la ecuación:

$$2x^2 - 2x - 4 = 0$$

Aplicando la fórmula cuadrática:

$$\frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-4)}}{2 \cdot 2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - (-32)}}{4} = \frac{2 \pm \sqrt{36}}{4}$$

$$= \frac{2 \pm 6}{4}$$

$$x_1 = \frac{2 + 6}{4} = 2$$

$$x_2 = \frac{2 - 6}{4} = -1$$

Rta: Las soluciones de $2x^2 - 2x - 4 = 0$ son: $x = 2$ y $x = -1$

Veamos otro ejemplo resuelto:

$$x^2 - \frac{7}{6}x + \frac{1}{3} = 0$$

$$6x^2 - 7x + 2 = 0$$

Se multiplicó miembro a miembro por 6

Hallemos las raíces, utilizando la fórmula resolvente:

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{(-7)^2 - 4 \cdot 6 \cdot 2}}{12} = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 48}}{12} = \frac{7 \pm \sqrt{1}}{12} = \frac{7 \pm 1}{12}$$

$$= \begin{cases} x_1 = \frac{8}{12} = \frac{2}{3} \\ x_2 = \frac{6}{12} = \frac{1}{2} \end{cases}$$



ACTIVIDAD 10:

Resuelve las siguientes ecuaciones:

- a) $(x - 6) \cdot (x + 2) = 0$ c) $4x^2 = 9x$
 b) $x^2 + 3x = 10$ d) $x^2 - 2x = 2$

2.1.3. Ecuaciones con dos incógnitas

Ya vimos que una ecuación es una igualdad en la que debemos averiguar el valor de una incógnita.

Cuando en la ecuación aparecen dos letras representando variables o incógnitas a averiguar el procedimiento cambia.

La expresión: $x + y = 3$ es un ejemplo de una ecuación de dos variables, y para resolverla debemos averiguar los valores de "x" e "y" que verifican la igualdad.

Dentro de las soluciones podemos intuir que estarán:

$$x = 2 \quad , \quad y = 1$$

También: $x = -1 \quad , \quad y = 4$

También: $x = 0 \quad , \quad y = 3$ etc. etc.

Todos esos pares de valores simultáneamente verifican la ecuación, ya que sumados dan por resultado 3.

Pero además de esos pares de valores existen otros infinitos pares que verifican la ecuación, por lo que podemos decir que existen infinitas soluciones para este tipo de ecuaciones.

Cada una de ellas puede ser interpretada como un punto de coordenadas (x, y) sobre una recta, ya que la ecuación $x + y = 3$ es la ecuación de una recta.



RECUERDA

Para encontrar los pares de valores que pertenecen a una recta y que verifican su ecuación se despeja una de las variables, en nuestro ejemplo:

$$y = -x + 3$$

Luego se le da valores arbitrarios a "x" y se obtienen los correspondientes valores de "y".

Las ecuaciones donde las incógnitas aparecen todas con grado 1, que no están elevadas a ninguna otra potencia, ni bajo ninguna raíz, se llaman ecuaciones lineales.

Si en vez de tener que averiguar los valores que asumen las variables que verifican una ecuación lineal de dos variables, tenemos dos ecuaciones lineales con dos incógnitas cada una y debemos encontrar los valores que verifican ambas ecuaciones simultáneamente.

2.2. Inecuaciones

Una inecuación es una desigualdad en la que hay dos miembros relacionados mediante cualquiera de estos signos \leq , $<$, \geq , $>$. Si esos miembros son expresiones algebraicas, estamos en presencia de una inecuación, en la cual figuran números e incógnitas.

Por ejemplo:

La única propiedad que cambia con respecto a las igualdades es cuando el número que **multiplica** o **divide** a la incógnita es un **número negativo**, al despejarlo, invierte el sentido de la desigualdad.



Por ejemplo:

$$-\frac{1}{4} - 2x \leq \frac{7}{4}$$

$$-2x \leq \frac{7}{4} + \frac{1}{4}$$

$$-2x \leq \frac{8}{4}$$

$$x \geq \frac{2}{-2}$$

$$x \geq -1$$

En este caso, al dividir miembro a miembro de la desigualdad por el valor, (-2) , se invierte el sentido de la misma.



ACTIVIDAD 11:

Halla el conjunto solución de las siguientes inecuaciones, graficando en la recta real cada uno de los conjunto solución.

a) $2x + 5 < 11$

b) $5 + 3x > 4$

c) $6 - 3x \leq -3$

Hemos repasado los procedimientos por los cuales se resuelven las ecuaciones con una incógnita, veremos ahora cómo

se resuelven las ecuaciones en las cuales aparecen dos incógnitas o variables.

2.3. Sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas.

Un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas representa un conjunto de dos rectas, y su resolución consiste en hallar un punto en común entre ellas, es decir encontrar un valor de cada incógnita que verifique el sistema.

Para hallar la solución de un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, se pueden aplicar distintos métodos.

En este repaso recordaremos los procedimientos de tres de ellos: Método de igualación, Método por sustitución y Método gráfico.



Por ejemplo:

Teniendo el siguiente sistema lineales con dos incógnitas, nuestro objetivo será hallar los valores de “ x ” y de “ y ” tal que las dos ecuaciones sean verdaderas.

$$\checkmark \begin{cases} 4x + 3y = 22 \\ 2x + 5y = 18 \end{cases}$$

Para ello, utilicemos el siguiente método:

Método de Igualación

$$\begin{cases} 4x + 3y = 22 \\ 2x + 5y = 18 \end{cases}$$

Despejamos una de las dos variables en las dos ecuaciones, con lo cual tenemos un sistema equivalente. En este caso elegimos despejar la variable "y" en ambas ecuaciones

$$\begin{cases} y = \frac{22 - 4x}{3} \\ y = \frac{18 - 2x}{5} \end{cases}$$

Recordamos que, al tener dos ecuaciones, si los primeros miembros son iguales los segundos también lo son, por lo que podemos igualar los segundos miembros.

$$\frac{22 - 4x}{3} = \frac{18 - 2x}{5}$$

Luego, estamos en presencia de una ecuación de 1° grado con una variable que resolvemos despejando el valor de esa única variable.

$$5 \cdot (22 - 4x) = 3 \cdot (18 - 2x)$$

$$110 - 20x = 54 - 6x$$

$$-20x + 6x = 54 - 110$$

$$-14x = -56$$

$$x = \frac{-56}{-14}$$

$$x = 4$$

Reemplazamos el valor de x obtenido, en alguna de las ecuaciones.

En nuestro ejemplo, elegimos reemplazar el valor de $x = 4$ en la segunda ecuación.

$$y = \frac{18 - 2 \cdot (4)}{5} = \frac{18 - 8}{5} = \frac{10}{5} = 2$$

Operamos para hallar el valor de y

La **solución** del sistema es el par de valores $(x; y) = (4; 2)$



VERIFICACIÓN

Para comprobarlo reemplazamos en ambas ecuaciones el valor hallado:

$$\begin{aligned} 4 \cdot (4) + 3 \cdot (2) &= 22 \\ 16 + 6 &= 22 \\ 22 &= 22 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2 \cdot (4) + 5 \cdot (2) &= 18 \\ 8 + 10 &= 18 \\ 18 &= 18 \end{aligned}$$

Ahora sí, podemos asegurar que el par $(4; 2)$ es la única solución del sistema planteado.

Veamos cuál es el procedimiento si se resuelve el sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas por otro método:

Método de Sustitución

Resolveremos por este método el mismo sistema que ya resolvimos por el método de igualación.

En nuestro ejemplo elegimos despejar la variable "y" en la primera ecuación

$$\begin{cases} 4x + 3y = 22 \\ 2x + 5y = 18 \end{cases} \rightarrow y = \frac{22 - 4x}{3}$$

Despejamos una de las variables en una de las ecuaciones.

Luego reemplazamos el valor hallado en la otra ecuación.

$$2x + 5 \cdot \left(\frac{22 - 4x}{3} \right) = 18$$

Nuevamente nos ha quedado planteada una ecuación de 1° grado con una incógnita que sabemos resolver

$$2x + \frac{110 - 20x}{3} = 18$$

$$2x - \frac{20x}{3} = 18 - \frac{110}{3}$$

$$-\frac{14x}{3} = -\frac{56}{3}$$

$$\boxed{x = 4}$$

Luego reemplazamos el valor de x obtenido, en alguna de las ecuaciones para obtener el valor de la otra incógnita y .

En nuestro ejemplo lo reemplazamos en la primera ecuación:

$$\begin{aligned} 4 \cdot (4) + 3y &= 22 \\ 16 + 3y &= 22 \\ 3y &= 22 - 16 \\ 3y &= 6 \\ y &= \frac{6}{3} \\ \boxed{y = 2} \end{aligned}$$

Confirmamos que la solución del sistema está dado por el par $(4; 2)$. No hace falta verificarlo, ya que se hizo al aplicar el método de igualación.

También es posible hallar la solución de un sistema a través del Método gráfico.

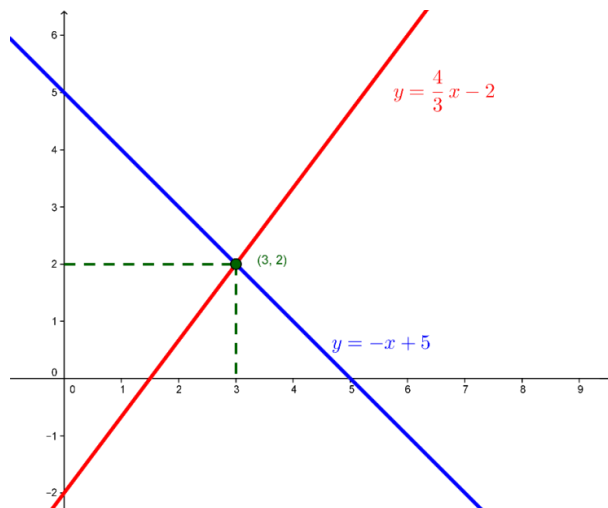
Método Gráfico

Consideramos como ejemplo el siguiente sistema:

$$\begin{cases} 3y + 6 = 4x \\ x + y = 5 \end{cases}$$

Para graficar las rectas que representan cada una de las ecuaciones de 1° grado con dos incógnitas, despejamos "y" en cada ecuación y obtenemos así las fórmulas de las dos funciones lineales.

En la primera $y = \frac{4}{3}x - 2$ En la segunda $y = -x + 5$



La solución del sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, cuya representación en el plano son dos rectas, está dada por el punto $(3, 2)$ que pertenece a ambas rectas.

Es decir que el par $(3, 2)$ verifica simultáneamente ambas ecuaciones del sistema.



¿Te animas a verificar gráficamente la solución del sistema resuelto por igualación y sustitución?

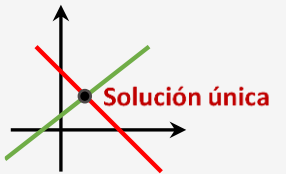




RECUERDA: para representar cada recta, podemos utilizar su pendiente y su ordenada al origen. El número que multiplica a "x" en la ecuación es la pendiente, determina su inclinación, y el término independiente es la ordenada al origen, es decir, el punto en el que la recta corta al eje y.



CLASIFICACIÓN DE UN SISTEMA DE DOS ECUACIONES LINEALES CON DOS INCÓGNITAS

Cuando resolvemos un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, podemos encontrarnos ante tres casos:

Qué sucede en el gráfico	Clase de sistema
Las rectas se cortan en un punto, es decir que tienen pendientes distintas.	
Las dos ecuaciones representan la misma recta, es decir que tienen la misma pendiente y la misma ordenada al origen.	
Las rectas son paralelas, es decir que tienen igual pendiente y distinta ordenada al origen.	

**ACTIVIDAD 12:**

Resuelve los siguientes sistemas, gráficlos en un sistema de ejes coordenados y luego clasifícalos:

$$\text{a) } \begin{cases} 3x + y = 7 \\ y - x = -1 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} x = 3 + y \\ 3y = -9 + 3x \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} x + y = 4 \\ y - 1 = -x \end{cases}$$